

القسم : تحليل رياضي السبئية : الرابعة : مع المادة : منطق رياضي المحاضرة : الثامنة نظري

ب مبدأ القنوية في جبر بول

لقد رأينا من تعريف جبر بول أنه كل خاصية تتكون من جزئين وتلاحظ أن كل جزء يمكن الحصول عليه من الآخر بالمبادلة بين العنيتين (ضرب فزلق) وبسبب العنيتين

(10 و 11) فنلاحظ بعبارة $x \cdot 1 = x$ ثنوية العبارة $x + 0 = x$

وهكذا نلاحظ في الجبر البوليني أن كل نظرية مستنتجة من مبادئ الخطة

سابقة للجبر البوليني (1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) تبين أهمية عندما نستبدل

أحد العنيتين (+) و (0) بالآخرى والعنيتان (10 و 11) أحدهما بالآخر

بطريقة ثنوية في جبر بول يكفي بالبرهان على نظرية ما نستنتج مما ستر

ثنوية

سفهوم جبر بول :

مبرهنة ليكن (A, B, C, D, E) جبراً بولانياً عندئذ إن عناصر E، والعلاقات

عليه تحققت الخوص التالية :

$$(1) \text{ قوانين اللامو : } x + x = x, x \cdot x = x$$

$$(2) \text{ } x + 1 = 1, x \cdot 0 = 0$$

$$(3) \text{ إذا كان } x \text{ أن عنصريه } E \text{ وكان } a \text{ عنصريه } E \text{ حيث تكون}$$

$$a \cdot x = 0, a + x = 1 \Rightarrow a = x'$$

$$(4) \text{ } x'' = (x')' = x, 0' = 1, 1' = 0$$

(5) قوانين دي مورغان :

$$(x+y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

(6) - قوانين الامتصاص :

$$x \cdot (x+y) = x, x + x \cdot y = x$$

إثبات :

$$(1) \text{ } (x+x) = (x+x) \cdot 1$$

$$= (x+x) \cdot (x+x')$$

$$= x + \underbrace{x \cdot x'}_{=0} = x + 0 = x$$

$$x \cdot x = x$$

$$x+1 = x+(x+x') = (x+x)+x' \quad (2)$$

$$= x+x' = 1 \quad (3)$$

$$x' = x' \cdot 1 = x'(a+x) = x' \cdot a + \underbrace{x' \cdot x}_{=0}$$

$$= ax' + ax = a(x'+x) = a \cdot 1 = a \quad (4)$$

لدينا حسب تعريفه، لمقم x' للعنصر x

$$x+x' = 1, \quad x \cdot x' = 0$$

$$\Rightarrow (x')' = x$$

$$1+0 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$1' = 0, \quad 0' = 1$$

(5)

$$\bullet (x+y)+x'y' = ((x+y)+x')(x+y+y')$$

$$= (1+y)(1+x) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bullet (x+y) \cdot (x'y') = x(x'y') + y \cdot (x'y')$$

$$= (xx')y' + (yy')x'$$

$$= 0 \cdot y' + 0 \cdot x' = 0 + 0 = 0$$

اعمال القانوذا التاليين من قوانين دي مورغان ينتج عنها مبدأ التوزيعية في جير بول

(6)

$$x \cdot (x+y) = x+xy = x \cdot 1 + xy =$$

$$= x(1+y) = x \cdot 1 = x$$

ان هذه الخواص بالإضافة الى شروط الواردية في تعريفه جير بول تفيدنا في براهن النظريات ذات العلاقة جير بول وكذلك في تبسيط واختصار التقابير البوليانية وتصميم الدارات في الحواسيب الالكترونية .

أمثلة:

11- أثبت أن:

$$a(a+b) = ab$$

$$a+ab = a+b$$

الحل:

$$a(a+b) = \underbrace{aa}_{=0} + ab = 0 + ab = ab$$

والقضية الثانية صحيحة من مبدأ التثنية في جبر بول.

12- أثبت أن:

$$a+b(a+c) = (a+b)(a+c)$$

$$a(b+ac) = ab+ac$$

الحل:

$$a(b+ac) = ab+ac$$

13- أثبت أن (في جبر بول)

$$(a+b)(a+c)(b+c) = (a+b)(a+c)$$

$$ab+ac+bc = ab+ac$$

الحل:

$$P_1 = (a+b)(a+c)(b+c) = (a+b)(a+c)(a \cdot a + b + c)$$

$$= (a+b)(a+c)((a+b)+c)((a'+c)+b)$$

$$= (a+b)((a+b)+c)(a'+c)((a'+c)+b)$$

$$= (a+b)(a+c) = P_2$$

القضية الثانية (العبارة الثانية) صحيحة من مبدأ التثنية في جبر بول.

14- اربط مع العبارة التالية:

$$F = xy + xy'z' + x'y'$$

انہ مجموعه الجزية المنتهية من E شكل شبكة جزية توارثية من B
 ولكن لا يمكن جربوہ جزئي

[3] انہ $D(6)$ جزية من $D(3)$ لكن لا شكل جربوہ جزئي من $D(3)$
 ولكن $D(6)$ في ذاتها هي جربوہ

[4] $D(70) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

هي جربوہ
 انہ المجموعة الجزائية

$A = \{1, 2, 35, 70\}$

هي جربوہ جزئي

$A_2 = \{1, 7, 10, 70\}$

$A_3 = \{1, 5, 14, 70\}$

لكن هي لا يمكن جربوہ كلا جربوہ جزية من $D(70)$

نفس الجدار المبدأ ستر والي يزود مورخينم البولياي

تعريف

اذا كان $(A, +, \cdot, 0, 1)$ و $(B, +, \cdot, 0, 1)$ جربوہ
 بولياين عندئذ ان الجدار الديكارتي $A \times B$ والمحقق للشرط التالية.

1) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$

2) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

3) $(x, y)' = (x', y')$

$0 = (0_A + 0_B)$ $1 = (1_A, 1_B)$

نفس الجدار المبدأ ستر لليرين البولياين A, B وللاصلا انه محقق
 شروط الجبر البولياين

سید، مورفیزم بولیائی:

تعریف: ادا کا ہے F دالة

$$F: A \rightarrow B$$

عندئیں F - مورفیزم بولیائی ادا کی ہے اگر F دالة

$$1) - F(x+y) = F(x) + F(y)$$

$$2) - F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$$

$$3) - F(x') = (F(x))' ; \forall x, y \in A$$

واذا كان المورفیزم بولیائی تقابل (متباين، عكاسي) فيكون المورفیزم بولیائی (بالضمان) الى كونه مورفیزم بولیائی (تقابل، متباين) فيكون المورفیزم بولیائی

نتيجة:

$$\begin{aligned} F(0_A) &= F(x \cdot x') = F(x) \cdot F(x') \\ &= F(x) \cdot (F(x))' \\ &= 0_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1_A) &= F(x + x') = F(x) + F(x') \\ &= F(x) + (F(x))' \\ &= 1_B \end{aligned}$$

سید، دالة:

اذا كان F دالة من A الى B فيكون B عندئذ ان F دالة متكافئة

① - F - مورفیزم بولیائی

$$F(x') = (F(x))' \quad , \quad F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y) \quad (1)$$

$$F(x + y) = F(x) + F(y) \quad (2)$$

$$F(x') = (F(x))'$$

الان بقاء:

① ← ②

هذا واضح

③ ← ②

لتفحص ان f هي دالة في (2) محقة

$$f(x+y) = f(x''+y'')$$

حيث x'' و y'' دالة

$$= f(x' \cdot y') = (f(x' \cdot y'))'$$

$$= (f(x') \cdot f(y'))' = ((f(x'))' \cdot (f(y'))')'$$

$$= f(x')' \cdot f(y')' = f(x'') + f(y'') = f(x) + f(y)$$

① ← ③

$$f(x \cdot y) = f(x'' \cdot y'')$$

$$= (f(x' + y'))'$$

$$= (f(x') + f(y'))'$$

$$= f(x')' + f(y')' = f(x'') + f(y'') = f(x) + f(y)$$

اي ان f متكافئة

نستنتج ان f هي دالة ليوليانة - مجموع الجذرات العنصرية
(الصورة الكاملة لتوزيع الضرب)

انتهت المحاضرة